



## فرآیندهای تصادفی مقدمات

محسن هوشمند  
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه  
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

# فرایندهای تصادفی

## مدل ریاضیاتی

- توصیف کمی پدیده فیزیکی
- معادله سقوط جسم با سرعت اولیه صفر
- برنامه پیچیده رایانه جهت شبیه‌سازی جمعیتی زیستی یا سامانه صنعتی بزرگ

## ▪ استفاده‌های مدل

- توصیف جزئیات فرایند
- پیش‌بینی خروجی‌ها
- طبقه‌بندی

## ▪ قضاوت و ارزیابی مدل مبنی بر «فایده» مدل

- توضیح کمی دقیق
- مدل فهرست موجودی
- استفاده برای تعداد بهینه جهت انبار کردن
- اطلاعات کیفی عمومی درباره روابط بین ضرائب و عوامل موثر بر پیشامد
- برای پدیده خاص بهترین مدل وجود ندارد
- استفاده از عیار عملگرای فایده‌مندی مناسب جهت معرفی دو یا چند مدل برای یک پیشامد
- جهت برآورده‌سازی انگیزه‌های متفاوت

# فرایندهای تصادفی

نور

- موجی

- موج پیوسته

- مناسب جهت طراحی عدسی عینک و تلسکوپ

- ذره‌ای

- موج گسسته (فوتون) بسته‌های انرژی

- مناسب جهت بررسی تأثیر آن بر شبکیه چشم

- هر دو مناسب و مفید

# فرایندهای تصادفی

## Stochastic

- ریشه یونانی
- به معنای قصدِ کاری داشتن، حدس زدن چیزی، و به معنای تصادف، شانس، اتفاقی
- متضاد قطعی، حتمی

## مدل قطعی

- پیش‌بینی تک‌خروجی منفرد برای مجموعه‌ای از ورودی‌ها
- پیش‌بینی خروجی با قطعیت
- مجموعه‌ای از معادلات جهت توصیف ورودی و خروجی دقیق سیستم

## مدل اتفاقی

- مواقع حضور عدم قطعیت
- پیش‌بینی مجموعه‌ای از خروجی‌ها
- مدل کردن فرایندی که دارای نوعی تصادفی بودن است
- هر کدام دارای وزنی احتمالی یا درست‌نمایی
- پرتاب سکه

## پدیده به خودی خود قطعی یا تصادفی نیست

- بسته به انتخاب مشاهده‌گر
- و هدف وی و مقید بودن عیار انتخاب آن

## واژه فرایند

# فرایندهای تصادفی

ابزاری ریاضی توضیح‌دهنده سیستمی که در طول زمان احتمالاً تغییر می‌کنند.

- مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی  $\{X(t), t \in T\}$

- متغیر تصادفی  $X$  و هم‌چنین اندیس  $t$  گسسته یا پیوسته

- $T$  شمارش‌پذیر:  $X$  فرایند زمان گسسته

- $T$  بازه روی محور اعداد حقیقی:  $X$  فرایند زمان پیوسته

- مجموعه مقادیر ممکن  $X$ : فضای حالت فرایند

- تک- یا چندبعدی

- گسسته یا پیوسته بودن فضای حالت

پیش‌بینی قیمت نفت در طول روزهای سال

- عدم امکان قطعیت کامل پیش‌بینی

- اما بعضی قیمت‌ها محتمل از دیگر قیمت‌ها

# فرایندهای تصادفی - آغاز مطالعه و استفاده

## حرکت براونی

- اولین فرایند تصادفی با مطالعه گسترده
- به افتخار گیاه‌شناس رابرت براون ۱۷۷۳ تا ۱۸۵۸
- حرکت تصادفی ذرات معلق در مایع یا گاز
- لوئی باشیه
- اولین مطالعات ریاضی این فرایند
- مدل تصادفی بازار سهام و اختیار معامله در سال ۱۹۰۰
- عدم توجه به دلیل ضعیفی بنیان‌های نظریه احتمال در آن روزگار
- اینشتین
- معرف‌گر آن به جامعه فیزیک با نمایش آن به عنوان روش غیرمستقیم تایید وجود اتم‌ها و مولکول‌ها

# فرایندهای تصادفی

اندري كولمولگروف ۱۹۰۳ تا ۱۹۸۷

- آغاز مطالعات دقیق ریاضی آن
- ۱۹۳۳ معرفی نظریه احتمال با اصول بنیادی جهت احتمال
- تعریف اصولی همچون کار اقلیدس برای هندسه
- با روش اصل آغازه، تعریف دقیق فرایندهای تصادفی
- به تصور آوردن فرایند تصادفی به مثابه متغیرهای تصادفی که از فضائی تابعی مقدار می‌گیرند ( یا فضای یک منحنی)
- مطالعه قیمت روزانه نفت در طول سال
- منحنی تحقق یافته متغیر تصادفی با تعریف فضای احتمال مناسب

# فرایندهای تصادفی

## جوزف دووب

- در کتاب فرایندهای تصادفی ۱۹۵۳
- [فرایند تصادفی] هر فرایندی است که در طول زمان اجرا می‌شود و با قوانین احتمال کنترل می‌شود ... [به زبان دقیق‌تر] هر خانواده از متغیرهای تصادفی  $X_t$  [که] تابعی اندازه‌پذیر است ...
- سازگار با نگاه کولمولگروف و بر پایه کارهای پل لوی ۱۸۸۶ تا ۱۹۷۱
- نگاه زمان‌محور و استفاده شده از ۱۹۴۰ تا امروز

## همزمان کیوسی ایتو

- توسعه نظریه به حساب تصادفی
- تعریف انتگرال فرایندهای تصادفی بر پایه فرایندهای تصادفی دیگر
- معادلات دیفرانسیل تصادفی



# کاربردها و مثال‌های فرایندهای تصادفی

## زنجیره مارکوف

- از فرایندهای تصادفی مهم
- توضیح حالت فعلی، حاوی تمامی اطلاعات موثر بر آینده فرایند
- استفاده از زنجیره مارکوف در مدل کارکرد
- پیش‌بینی جریان شلوغی (ترافیک)، شبکه‌های کامپیوتری، مسائل ژنتیک، صف‌ها
- مدل‌سازی ارتباطات دوطرفه در اینترنت
- اینترنت ساختاری پیچیده و حرکت تصادفی ترافیک بین گره‌های شبکه
- استفاده از زنجیره مارکوف
- جهت تبیین ترافیک که ذاتا پیش‌بینی‌ناپذیر است
- تبیین چگونگی کار شبکه با وجود پیچیدگی در ساختارش
- تعریف رتبه‌صفحه گوگل با زنجیره مارکوف
- استفاده در آموزش

# کاربردها و مثال‌های فرایندهای تصادفی

## زنجیره مارکوف

- مدل‌سازی زیستی
- فرض بسیاری از موارد زیستی به دارا بودن «خاصیت مارکوفی»
  - حالت فعلی سیستم، امکان پیش‌بینی آینده
- فرایند مارکوفی دو حالتی - زمان - پیوسته جهت مدل‌سازی
  - باز و بسته‌شدن کانال یونی
  - اتصال و انفصال مولکول لیگاند به پذیرنده پروتئین

# کاربردها و مثال‌های فرایندهای تصادفی

## حرکت براونی نسبتی

- استفاده از فرایندهای تصادفی در مدل کردن ورودی سیستم
- مطالعات اخیر شبکه‌های ارتباطی نشان‌دهنده وابستگی برد بلند **long-range dependence**
- رفتار فرایندی واقعی نه تنها بسته به موقعیت  $t$  بلکه تمامی تاریخ فرایند تا زمان  $t$
- همچنین موثر بر رفتار موردانتظار کل سیستم
- عدم کارایی زنجیره مارکوف
- خودهمسانی **self-similarity** در ارتباطات شبکه‌ای
- مقیاس‌پذیری
- امروزه توجه به مطالعات خودهمسانی و وابستگی برد بلند
- حرکت براونی معرفی شده کولموگروف جهت مدل پدیده توربولنس از مدل‌های ساده

# کاربردها و مثال‌های فرایندهای تصادفی

حرکت براونی و ریاضیات مالی

- پایه مدل ریاضیاتی بازارهای مالی
- مورداستفاده در مدل نوسان‌ها در قیمت‌های سهام
- نظریه قیمت‌گذاری
- اختیار معامله

▪ قراردادی که فروشنده خریدار را دارای حق خرید و نه اجبار ( هنگام درخواست اختیار معامله ) یا دارای حق فروش ( هنگام واگذاری حق اختیار) دارای مشخصی در دوره‌ای می‌کند.

▪

# کاربردها و مثال‌های فرایندهای تصادفی

حرکت براونی دو-بعدی و فرایندهای مرتبط  
▪ منجر به حل حدسیات فراوان فیزیکدانان متمرکز بر پدیده‌های مهم

# کاربردها و مثال‌های فرایندهای تصادفی

مدل‌سازی زیستی

- فرایندهای شاخه‌زنی
- فرایندهای زاد و مرگ
- شبکه‌های تصادفی

تأثیر نوفه

- نیروی شکل‌دهنده زیست‌شناسی
- انتقال‌های نوفه‌دار
  - کانال‌های یونی تصادفی
  - تولید نوفه موتورهاى مولکولى
  - ایجاد نوفه در تعامل‌های پروتئین پروتئین
  - نوفه موجب بیان متفاوت ژن‌ها
  - موجب تبعات قوی بر رفتار و کارکرد سلولی

# مطالبی که عرضه خواهد شد

احتمالات مقدماتی

احتمال شرطی و بیزی

فرایندهای مارکوف

- زنجیره مارکوف زمان گسسته

- فرایند پواسون

- زنجیره مارکوف زمان پیوسته

فرایندهای تجدیدشونده

حرکت براونی

# مراجع و منابع

[راس] S. Ross, "Introduction to Probability Models," Academic Press- Elsevier, 12<sup>th</sup> ed, 2019.

[پینسکی] M. Pinsky, S. Karlin, "An Introduction to Stochastic Modeling," Academic Press- Elsevier, 4<sup>th</sup> ed, 2011.

[گوبنر] J. A. Gubner, "Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers," Cambridge University Press, 2006.

[بن‌ونوتو] N. Benvenuto, M. Zorzi, "Principles of Communication Networks and Systems," Wiley. 2011.

[راس ۲] S. Ross, "Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists," Academic Press- Elsevier, 6<sup>th</sup> ed, 2020.

[پوترمن] M. L. Puterman, "Markov Decision Processes- Discrete Stochastic Dynamic Programming," Wiley. 2005.

[فروند] ج. فروند، «آمار ریاضی و کاربردهای آن»، مرکز نشر دانشگاهی

[ملکیان] ۱. ملکیان، «ارزیابی کارایی سیستم‌ها و شبکه‌های کامپیوتری»، نص، بهار ۹۶

اینترنت و مقالات



# ارزیابی

Digital filters [7]–[10]: sophisticated filter banks [7] were designed to recognize QRS complexes in which they analyzed the positions and magnitudes of sharp waves and used a special digital band-pass filter to reduce the false detection of ECG signals in the MIT-BIH database [11]. The difference operation method (DOM) [8] scheme including two stages was proposed: the first stage was to find the point R by applying the difference equation operation to an ECG signal, then the second stage looked for the points Q and S based on the point R to find the QRS complex. The work [9] used some special digital filters to detect and classify ECG signal in time or frequency domain. Slope- and peak-sensitive band-pass filters were employed for the detection [10]. The morphological smoothing further improved its performance.

Wavelet transform (WT) [12]–[16]: the transform yields a time-scale representation similar to the time-frequency representation of the short-time Fourier transform (STFT) [12], while the WT uses a set of analyzing functions that allows a variable time and frequency resolution for different frequency bands [13]. By the multiscale feature of WT, the QRS complex can be distinguished from high P or T waves, noise, and baseline drift. The dyadic discrete WT (DWT) was usually implemented using a dyadic filter bank where the filter coefficients were directly derived from the wavelet function [14]. The WT based on the adaptive threshold [15] and WT based on multi-lead ECG [16] were evaluated on the QT database [17].

Adaptive matched filters [18]–[22]: a two-stage successive cancellation algorithm that sequentially separates

تمرین‌ها

- کتبی
- عملی

امتحان

▪ خلق دانش

▪ کپی پیست (گرفتن گذاشتن) اعلام منابع هر تمرین

# اعلانات

حل تمرین درس: حسین الله بخشی

نحوه ارسال تمرین‌ها، پروژه‌ها، دیگر موارد

▪ ا-نامه عنوان ایمیل: farayand\_tasadofi@proton.me

▪ عنوان: «فرآیندهای تصادفی - تمرین سری اول»

▪ فایل متنی: قالب پی‌دی‌اف

▪ نام فایل: FT-T#-Afshar-Mahmoud\_Sotode-Morteza.pdf

▪ نام فایل: FT-P#-Afshar-Mahmoud\_Sotode-Morteza.pdf

▪ دیگر فایل‌ها

▪ نام فایل: FT-T#-Afshar-Mahmoud\_Sotode-Morteza.zip

# منابع

[پینسکی]

[Baudoin] F. Baudoin, “Stochastic Processes,” Elsevier, pp. 452- 452, 2010.

[Carfora] M. F. Carfora, “Stochastic Processes,” Encyclopedia of Bioinformatics and Computational Biology, Elsevier, 2018.